Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 8

Prof. Dr. Katia Saporiti

Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Mittwoch, 6. November 2019, ab 17.00 Uhr

MASTER INFO EVENT

Infos unter: t.uzh.ch/masterinfo

17.15 Uhr, KOL-G-217
Einführungsvortrag: Das Masterstudium – und dann?
Dr. oec. publ. Roger Gfrörer, Leiter UZH Career Services

ab 17.15 Uhr, Lichthof
Poster-Session verschiedener Masterstudienprogramme

18.15 – 19.00 Uhr, KOL-G-204
Präsentation der MA-Programme Philosophie, Grundlagen der Moralphilosophie und Wissenschaftsphilosophie

Übersicht

- Modallogik
  - Strikte Implikation
  - Möglichkeit, Notwendigkeit und modale Negation
  - kontingent / notwendig und kompatibel/inkompatibel
  - Modallogisches Quadrat
  - Formalisierungen
  - Anwendungsbeispiele
  - Eine einfache Modallogik: (S5)
    - Syntax für (S5)
    - Semantik für (S5)
    - Baumkalkül für (S5)

Modallogik

- Die Modallogik beschäftigt sich mit den logischen Zusammenhängen zwischen Sätzen, die Modalausdrücke enthalten („notwendig“, „möglich“, „kontingent“).
  - Wenn etwas tatsächlich der Fall ist, dann ist es auch möglich, dass es der Fall ist.
  - Wenn etwas notwendigerweise der Fall ist, dann ist es tatsächlich der Fall.
- Schon Aristoteles hat versucht, inferentielle Verhältnisse zwischen Modalurteilen zu systematisieren. (*Erste Analytik* I, 8–22)
- Die Modallogik, die wir heute kennen, geht in erster Linie auf den amerikanischen Philosophen und Logiker C. I. Lewis (1883–1964) zurück.
- In den 1950ger Jahren entwickelte eine Gruppe von Logikern und Philosophen (u.a. Saul Kripke) den Gedanken, die modalen Begriffe der Möglichkeit und der Notwendigkeit liessen sich mit Hilfe des Begriffs der **möglichen Welt** erfassen. (Der Begriff der *möglichen Welt* geht auf Leibniz (1646-1716) zurück.)
- Diesem Gedanken liegt die Idee zugrunde, dass eine Aussage **notwendig wahr** ist (also nicht nur wahr ist, sondern wahr sein muss), wenn sie nicht nur in unserer Welt (d.h. in der wirklichen Welt), sondern **in allen möglichen Welten** wahr ist. Dementsprechend ist etwas notwendig falsch, wenn es nicht nur in der wirklichen, sondern in allen möglichen Welten falsch ist.

Strikte Implikation

- C.I. Lewis beanstandete die Gleichsetzung von logischer Folge und materialer Implikation (Konditional) in den *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead 1910) und führte die ***strikte Implikation*** ein.
  - Anmerkung: Wir haben in dieser Logik-Einführung weder die materiale Implikation – das Konditional („→“) – mit der Folgerungsbeziehung („⇒“) noch Wahrheit mit logischer Wahrheit gleichgesetzt.
- Wenn Y aus X folgt, dann ist es nicht nur nicht der Fall, dass X wahr und Y zugleich falsch ist, sondern es ist **unmöglich**, dass X wahr und Y zugleich falsch ist. Für dieses Verhältnis führt Lewis einen zweistelligen Operator ein (den „Fischhaken“): die strikte Implikation.
  - p ⥽ q (lies: „p impliziert strikt q“)
    - p impliziert q genau dann strikt (p⥽q), wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

      a) Es ist nicht der Fall dass p wahr und q falsch ist.

      b) Es ist notwendig wahr, dass (a).

Literatur: C.J. Lewis (1912), „Implication and the Algebra of Logic“, *Mind* 21, 522-531;
ders., *A Survey of Symbolic Logic*, Cambridge 1918

Materiale und strikte Implikation

– Im Unterschied zur materialen Implikation ist die strikte Implikation (wie die Folgerungsbeziehung) nur partiell wahrheitsfunktional (also genau genommen kein „Junktor").

p impliziert q genau dann strikt ($p \prec q$), wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

a) *Es ist nicht der Fall dass p wahr und q falsch ist.*
b) *Es ist notwendig wahr, dass (a).*

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

p	q	$p \prec q$
w	w	?
w	f	f
f	w	?
f	f	?

– In Zeile 2 der Wahrheitstafel für den Fischhaken wird Bedingung (a) nicht erfüllt, daher ist der Wahrheitswert dort f.
– In den Zeilen 1, 3 und 4 ist (a) erfüllt, aber ob auch (b) erfüllt ist, bleibt offen.
– Anstelle eines Wahrheitswertverlaufs ergibt sich für $p \prec q$: (?, f, ?, ?).

Möglichkeit, Notwendigkeit und modale Negation

– Zusätzlich zu Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen und Implikationen berücksichtigt die moderne Modallogik Aussagen der Form
  – Es ist möglich, dass p.
  – Es ist notwendig, dass p.
– Zu diesem Zweck werden zwei **Operatoren** eingeführt: der Möglichkeitsoperator (mitgeteilt durch eine vorangestellte Raute) und der Notwendigkeitsoperator (mitgeteilt durch ein vorangestelltes Quadrat).
  – $\Diamond$ p („Es ist möglich, dass p.“) [engl. wird die Raute *diamond* genannt]
  – $\Box$ p („Es ist notwendig, dass p.“) [engl. wird das Quadrat *box* genannt]
– **Modale Negation MN** (Äquivalenzen)

(1)	$\neg\Diamond p$	$\Leftrightarrow$	$\Box\neg p$
(2)	$\Diamond\neg p$	$\Leftrightarrow$	$\neg\Box p$
(3)	$\Box p$	$\Leftrightarrow$	$\neg\Diamond\neg p$
(4)	$\Diamond p$	$\Leftrightarrow$	$\neg\Box\neg p$

(1) Es ist genau dann nicht möglich, dass Junggesellen verheiratet sind, wenn es notwendig ist, dass Junggesellen nicht verheiratet sind.

(2) Es ist genau dann möglich, dass es nicht schneit, wenn es nicht notwendig ist, dass es schneit.

(3) Es ist genau dann notwendig, dass Dreiecke drei Seiten haben, wenn es nicht möglich ist, dass Dreiecke nicht drei Seiten haben.

(4) Es ist möglich, dass es morgen regnet, wenn es nicht notwendig ist, dass es morgen nicht regnet.

„kontingent“/„notwendig“ und „kompatibel“/ „inkompatibel“

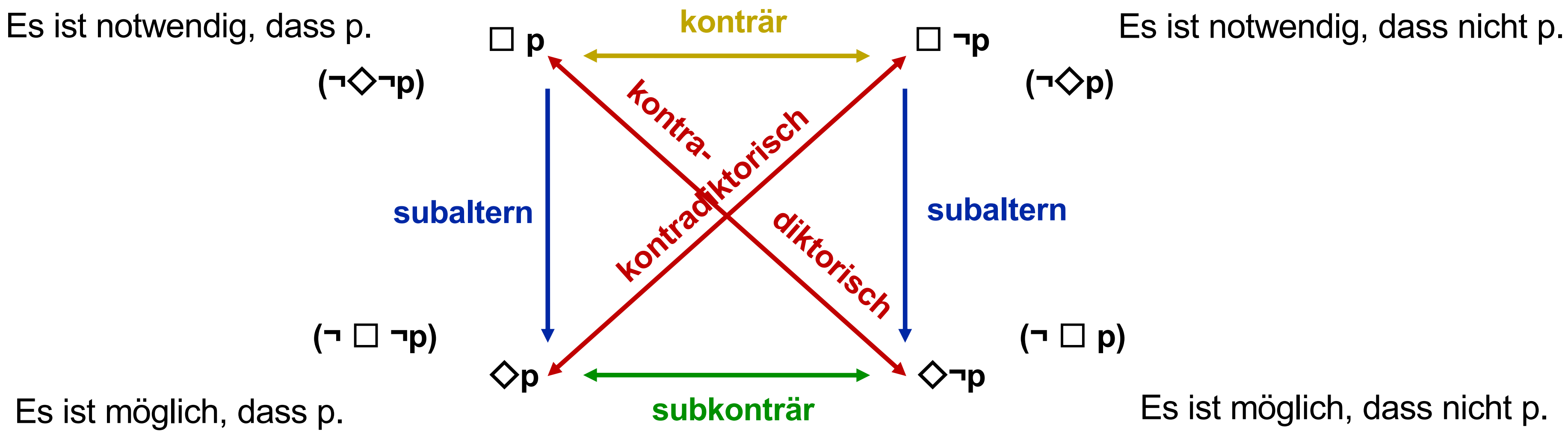
Weitere Modalausdrücke, die mit Hilfe der Operatoren „notwendig“ und „möglich“ wiedergegeben werden:

- p ist **kontingent**: ∇p
  - $\nabla p =\text{def. } \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$
- p ist **notwendig (im Sinne von „nicht kontingent“)**: Δp
  - $\Delta p =\text{def. } (\Box\, p \vee \Box\, \neg p)$
    - (Wird „notwendig“ im Sinne von „notwendig wahr“ gebraucht, dann muss „p ist notwendig“ durch „ $\Box$ p“ wiedergegeben werden.)
    - p ist notwendig (nicht kontingent): $\neg(\Diamond p \wedge \Diamond \neg p)$, $\neg \Diamond p \vee \neg \Diamond \neg p$
- p und q sind **kompatibel**: $p \bigcirc q$
  - $p \bigcirc q =\text{def. } \Diamond(p \wedge q)$
- p und q sind **inkompatibel**: $p \mathbin{\textcircled{$\neg$}} q$
  - $p \mathbin{\textcircled{$\neg$}} q =\text{def. } \neg\,(p \bigcirc q)$

Das modallogische Quadrat

Zwei **kontràre** Aussagen können nicht beide wahr sein, aber sie können beide falsch sein.

Von zwei **kontradiktorischen** Aussagen ist immer genau eine wahr.



Zwei **subkonträre** Aussagen können nicht beide falsch sein, aber sie können beide wahr sein.

Aus Aussagen folgen ihre **subalternen** Aussagen, aber nicht umgekehrt.

Formalisierungen

1.	Alles muss eine Ursache haben.	p: Alles hat eine Ursache.	$\Box p$
2.	Es ist möglich, dass Tiere denken.	p: Tiere denken.	$\Diamond p$
3.	In gar keinem Fall hat dieser Hund keinen Verstand.	p: Dieser Hund hat Verstand.	$\neg\Diamond\neg p$
4.	Es kann nicht sein, dass Peter lügt.	p: Peter lügt.	$\neg\Diamond p$
5.	Tanja ist möglicherweise schon nach Hause gegangen.	p: Tanja ist schon nach Hause gegangen.	$\Diamond p$
6.	Wronski kann sehr galant sein.	p: Wronski ist galant.	$\Diamond p$
7.	Es ist nicht notwendig, dass es unmöglich ist, dass die Kurse steigen.	p: Die Kurse steigen.	$\neg\Box\neg\Diamond p$ $\Diamond\Diamond p$
8.	Möglicherweise ist es nicht notwendig, dass nicht alle Karten gegeben werden.	p: Alle Karten werden gegeben.	$\Diamond\neg\Box\neg p$ $\Diamond\Diamond p$

Anwendungen (Beispiele)

- Alethische Logik (Möglichkeit und Notwendigkeit)
- Epistemische Logik (Wissen)
- Doxastische Logik (Meinen)
  - $\Diamond$p: p wird für möglich gehalten.
  - $\Box$p: p wird für gewiss gehalten.
- Zeitlogik/ temporale Logik/ Tempus-Logik (Zeit)
  - $\Diamond$p: p gilt irgendwann (in der Vergangenheit bzw. Zukunft)
  - $\Box$p: p gilt immer (in der Vergangenheit bzw. Zukunft)
- Dynamische Logik (Veränderung)
- Deontische Logik (Sollen)
  - $\Diamond$p: p ist erlaubt.
  - $\Box$p: p ist geboten.

Einfache Modallogik (S5) – Syntax

- **Grundsymbole**
  - Zu den Grundsymbolen von AL, PL und PL_I werden jeweils die Symbole „◇“ und „ □“ zur Mitteilung zweier einstelliger Operatoren hinzugenommen, um $S5_{AL}$, $S5_{PL}$ und $S5_{PL\text{-}I}$ zu erhalten.
- **Formeln**
  - Die rekursive Definition einer Formel von AL, PL und PL_I wird jeweils um die folgenden zwei Regeln erweitert, um $S5_{AL}$, $S5_{PL}$ und $S5_{PL\text{-}I}$ zu erhalten:
    - Wenn α eine Formel ist, dann ist auch ◇α eine Formel.
    - Wenn α eine Formel ist, dann ist auch □α eine Formel.
- **Klammerkonventionen**
  - „◇“ und „ □“ binden stärker als alle anderen Operatoren. Klammern, die demnach überflüssig sind, können weggelassen werden.

Beispiel: Syntax für $S5_{AL}$

1. Grundsymbole (Vokabular)
   a. Satzkonstanten: p, q, r, s ...
   b. Monadische Operatoren: $\neg, \Diamond, \Box$
   c. Dyadische Operatoren: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   d. Hilfszeichen (Klammern): (,)
2. Rekursive Definition für Formeln in $S5_{AL}$
   a. Jede Satzkonstante ist eine Formel.
   b. Wenn α eine Formel ist, dann auch $\neg\alpha$.
   c. Wenn α eine Formel ist, dann auch $\Diamond\alpha$.
   d. Wenn α eine Formel ist, dann auch $\Box\,\alpha$.
   e. Wenn ✻ ein dyadischer Operator und α und β Formeln sind, dann ist (α✻β) eine Formel.
   f. Nichts sonst ist eine Formel.
3. Klammerkonventionen
   a. „$\Diamond$“ und „ $\Box$“ binden stärker als Junktoren, deren Bindungsstärke von links nach recht abnimmt: „$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$“.
   a. Klammern, die demnach überflüssig sind, können weggelassen werden.
   b. Äussere Klammern können weggelassen werden.

Alternativ: statt 2. b.-d.:
Wenn ✻ ein monadischer Operator und α eine Formel ist, dann ist auch ✻α eine Formel.

Einfache Modallogik (S5) – Semantik

- Formeln in S5 sind nicht einfach wahr oder falsch, sondern wahr in bestimmten möglichen Welten.
- Wir nehmen deshalb an, es gebe mögliche Welten *n, m, l, k, i* ... und indizieren alle Formeln.
  - ω sei eine beliebige mögliche Welt, dann schreiben wir
    - $\alpha_{(\omega)} = w$ (für „α ist wahr in ω")
    - $\alpha_{(\omega)} = f$ (für „α ist falsch in ω")
- Eine Formel ist genau dann **modallogisch wahr** (eine modallogische Tautologie, modallogisch gültig), wenn sie in allen möglichen Welten wahr ist.
- Alternative Formulierung: Eine modallogische Formel ist genau dann **logisch wahr**, wenn sie in allen möglichen Welten wahr ist.

... Semantik für S5

– Die Bedingungen für eine ***modallogische Bewertung*** v (für die Menge aller Formeln über einem System möglicher Welten) werden jeweils angepasst, indem die Formeln indiziert werden:

  – $v(\neg\alpha_{(\omega)}) = w$ gdw. $v(\alpha_{(\omega)}) = f$

  – $v(\neg\alpha_{(\omega)}) = f$ gdw. $v(\alpha_{(\omega)}) = w$ usw. für alle Bedingungen

– Die Bedingungen werden wie folgt ergänzt:

  – $v(\Diamond\alpha_{(\omega)}) = w$ gdw. $v(\alpha) = w$ in mindestens einer Welt [für mind. eine mögl. Welt ζ: $v(\alpha_{(\zeta)}) = w$]

  – $v(\Diamond\alpha_{(\omega)}) = f$ gdw. $v(\alpha) = f$ in allen möglichen Welten [für alle mögl. Welten ψ: $v(\alpha_{(\psi)}) = f$]

  – $v(\Box\alpha_{(\omega)}) = w$ gdw. $v(\alpha) = w$ in allen möglichen Welten [für alle mögl. Welten ψ: $v(\alpha_{(\psi)}) = w$]

  – $v(\Box\alpha_{(\omega)}) = f$ gdw. $v(\alpha) = f$ in mindestens einer Welt [für mind. eine mögl. Welt ζ: $v(\alpha_{(\zeta)}) = f$]

– Eine Formel α ist S5-gültig gdw. α unter jeder möglichen modallogischen Bewertung wahr ist.

– Eine Formel α ist S5-gültig gdw. ¬α unter keiner modallogischen Bewertung wahr ist.

Baumkalkül für S5

- Auch S5-Gültigkeit kann mit Hilfe von Bäumen nachgewiesen werden.
- Neben den schon bekannten Regeln für die Junktoren (¬, ∧, ∨, →, ↔), die Quantoren (∃x,∀x) und das Identitätszeichen (=) gelten bei der Konstruktion von Bäumen die folgenden vier Regeln für die Erweiterung eines Baums:
- **Modale Negation (MN)**

$$\begin{array}{c} \neg\Diamond\alpha_{(\omega)} \\ | \\ \Box\neg\alpha_{(\omega)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\Box\alpha_{(\omega)} \\ | \\ \Diamond\neg\alpha_{(\omega)} \end{array}$$

- **Möglichkeits-/Notwendigkeitsbeseitigung**

$$\textbf{(MB)} \quad \begin{array}{c} \Diamond\alpha_{(\omega)} \\ | \\ \alpha_{(\upsilon)} \end{array} \qquad\qquad \textbf{(NB)} \quad \begin{array}{c} \Box\alpha_{(\omega)} \\ | \\ \alpha_{(\upsilon)} \end{array}$$

υ muss neu sein & MB darf nur einmal angewendet werden

υ frei wählbar & NB darf mehrmals angewendet werden

... Baumkalkül für S5

– Damit ergeben sich folgende Regeln für die Konstruktion von Bäumen für $S5_{AL}$ (1,2,6-8), $S5_{PL}$ (1-4, 6-8) und $S5_{PL\text{-}I}$ (1-8).

(1) α-Regel **(α)** (nicht verzweigend für „α-Formeln“)

(2) β-Regel **(β)** (verzweigend für „β-Formeln“)

(3) Allbeseitigung **(AB)** (für „γ-Formeln, Konstante beliebig, wiederholbar)

(4) Existenzbeseitigung **(EB)** (für „δ-Formeln“, Konstante neu, nicht wiederholbar)

(5) Identitätsregeln **(I)** (für „ε-Formeln“)

(6) Modale Negation **(MN)** (für $\neg\Diamond$ und $\neg\Box$, die zu $\Box\neg$ bzw. $\Diamond\neg$ werden)

(7) Möglichkeitsbeseitigung **(MB)** (Index neu, nicht wiederholbar)

(8) Notwendigkeitsbeseitigung **(NB)** (Index beliebig, wiederholbar)

– Ein Ast in einem Baum für eine S5-Formel ist genau dann ***geschlossen***, wenn eine Formel und ihre Negation auf ihm vorkommen *und die Formel und ihre Negation denselben Index haben* oder wenn (wenn I eine Individuenkonstante ist) eine Formel der Form $\neg I = I$ bzw. $\neg(I = I)$ auf ihm vorkommt.

Beispiele (Beweise)

I. Beweis für: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(1)	$\neg (p \rightarrow (q \rightarrow p))_{(n)}$	*(NdF)*
(2)	$p_{(n)}$	*aus 1 (α)*
(3)	$\neg (q \rightarrow p)_{(n)}$	
(4)	$q_{(n)}$	*aus 3 (α)*
(5)	$\neg p_{(n)}$	
	✘	

II. Beweis für: $\vdash (\Box p \rightarrow p)$

(1)	$\neg(\Box p \rightarrow p)_{(n)}$	*(NdF)*
(2)	$\Box p_{(n)}$	*aus 1 (α)*
(3)	$\neg p_{(n)}$	
(4)	$p_{(n)}$	*aus 2 (NB), (n)*
	✘	

Alle aussagenlogischen Tautologien sind auch $S5_{AL}$-Tautologien.

Beispiele (Beweise)

VI. Beweis für: $\vdash \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$

(1)	$\neg(\forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px)_{(n)}$	*(NdF)*
(2)	$\forall x \Box Px_{\ (n)}$	*aus 1 (α)*
(3)	$\neg \Box \forall x Px_{\ (n)}$	
(4)	$\Diamond \neg \forall x Px_{\ (n)}$	*aus 3 (MN)*
(5)	$\neg \forall x Px_{\ (k)}$	*aus 4 (MB), (k) neu*
(6)	$\neg Pa_{\ (k)}$	*aus 5 (EB), a neu*
(7)	$\Box Pa_{\ (n)}$	*aus 2 (AB), a*
(8)	$Pa_{\ (k)}$	*aus 7 (NB), (k)*
	✘	

FIN